BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Н.Ф.ГАСЫМОВА

В работе изучается нелинейный сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта, порожденный одним классом двумерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Такие уравнения встречаются при изучении предельных значений на остове бицилиндра аналитической в бицилиндрической области функции и в теории сингулярных интегральных уравнений. В настоящей работе доказывается сжимаемость изучаемого оператора в метрике пространства $L_2(T^2)$.

§ 1. Некоторые обозначения и вспомогательные факты

Рассмотрим двумерное нелинейное сингулярное интегральное уравнение (НСИУ) вида

$$\varphi(x,y)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F[s,t,\varphi(s,t)]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt+f(x,y), \tag{A}$$

где λ – положительный параметр, F и f – заданные функции, а φ – искомая функция. Чтобы исследовать уравнение вида (A) введем следующие обозначения.

Через $C(T^2)$ обозначим пространство непрерывных на $T^2=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ и 2π – периодических по каждый из переменных функций с нормой

$$\|f\|_{C(T^2)}=\max_{(x,y)\in T^2}|f(x,y)| \tag{1.1}$$

Пусть

$$\Delta_h^{1,0}f(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y),\quad \Delta_\eta^{0,1}f(x,y)=f(x,y+\eta)-f(x,y),$$

$$\Delta_{h,\eta}^{1,1}f(x,y)=f(x,y)-f(x+h,y)-f(x,y+\eta)+f(x+h,y+\eta) \tag{1.2}$$

Эти величины называются соответственно частной разностью по x с шагом h, по y с шагом η, и смешанной разностью по совокупности переменных с шагом h и η в точке (x,y).

Далее обозначим

$$\omega_f^{1,0}(\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta_h^{1,0}f(x,y)\right\|_{C(T^2)},\quad \omega_f^{0,1}(\eta)=\sup_{|h|\le\eta}\left\|\Delta_h^{0,1}f(x,y)\right\|_{C(T^2)},$$

$$\omega_f^{1,1}(\delta,\eta)=\sup_{\substack{|h_1|\le\delta\\|h_2|\le\eta}}\left\|\Delta_{h_1,h_2}^{1,1}f(x,y)\right\|_{C(T^2)} \tag{1.3}$$

С помощью этих характеристик вводится (см.напр.[3]) пространство

$$K_{\alpha,\beta}^{1,1}=\left\{f\in C(T^2)\,\middle|\,\omega_f^{1,0}(\delta)=O(\delta^\alpha),\omega_f^{0,1}(\eta)=O(\eta^\beta),\omega_f^{1,1}(\delta,\eta)=O(\delta^\alpha\cdot\eta^\beta)\right\}\quad 0<\alpha,\beta\le 1 \tag{1.4}$$

С нормой

$$\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}=\max\left\{\|f\|_{C(T^2)},\ \sup_{\delta>0}\frac{\omega_f^{1,0}(\delta)}{\delta^\alpha},\ \sup_{\eta>0}\frac{\omega_f^{0,1}(\eta)}{\eta^\beta},\ \sup_{\substack{\delta>0\\\eta>0}}\frac{\omega_f^{1,1}(\delta,\eta)}{\delta^\alpha\cdot\eta^\beta}\right\}$$

Известно [3], что пространство $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ является банаховым.

Пусть $f\in C(T^2)$. Рассмотрим двукратный сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$\tilde{f}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt \tag{1.5}$$

Отметим, что интеграл (1.5) понимается в смысле главного значения.
Из оценок, полученных в работах [3], [4] следует, что сингулярный оператор (СО)

$$(Sf)(x,y)=\tilde{f}(x,y) \tag{1.6}$$

действует из $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ в $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ и ограничен при $0<\alpha$, $\beta<1$.

А теперь докажем следующую лемму, которой в дальнейшем будем пользоваться.

Лемма 1.1. Пусть $f(x,y)\in C(T^2)$. Тогда для $\forall p\ge 1$ и $0<\xi$, $\eta\le\pi$ имеет место неравенство:

$$\|f\|_{C(T^2)}\le\omega_f^{1,0}(\xi)+\omega_f^{0,1}(\eta)+\xi^{-\frac{1}{p}}\cdot\eta^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^p\,dxdy\right\}^{1/p} \tag{1.7}$$

Доказательство: Пусть $f\in C(T^2)$, $0<\xi,\eta\le\pi$ и $(x_0,y_0)\in T^2$ такая точка, что $\|f\|_{C(T^2)}=|f(x_0,y_0)|$.

Обозначим

$$E_1(x_0)=\begin{cases}[x_0,\,x_0+\xi], & если\ x_0+\xi\le\pi,\\ [x_0-\xi,\,x_0], & если\ x_0+\xi>\pi,\end{cases}$$

$$E_2(y_0)=\begin{cases}[y_0, y_0+\eta], \text{ если } y_0+\eta\le\pi,\\ [y_0-\eta,\ y_0], \text{ если } y_0+\eta>\pi\end{cases}$$

Ясно, что $E_1(x_0)\times E_2(y_0)\subset T^2$. Используя теоремы о среднем значении для определенного интеграла, получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^p\,dxdy\ge\iint_{E_1(x_0)\times E_2(y_0)}|f(x,y)|^p\,dxdy=f(s,t)\cdot\xi\cdot\eta,\quad\text{где}$$

$(s,t)\in E_1(x_0)\times E_2(y_0)$, $|x_0-s|\le\xi$, $|y_0-t|\le\eta$. Отсюда следует, что

$$|f(s,t)|\le\frac{\|f\|_{L_p}}{(\xi\cdot\eta)^{1/p}}.$$

Учитывая последнее неравенство, находим, что

$$\|f\|_{C(T^2)}=|f(x_0,y_0)|\le|f(x_0,y_0)-f(s,t)|+|f(s,t)|=|f(x_0,y_0)-f(s,y_0)+f(s,y_0)-f(s,t)|+$$

$$+|f(s,t)|\le\omega_f^{1,0}(\xi)+\omega_f^{0,1}(\eta)+(\xi\cdot\eta)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p}$$

Лемма доказана.

Следствие 1.1. Пусть $f\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}$. Тогда имеет место неравенство:

$$\|f\|_{C(T^2)}\le\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}\left(\xi^\alpha+\eta^\beta\right)+(\xi\cdot\eta)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p}\tag{1.8}$$

Доказательство. Чтобы доказать справедливость (1.8), достаточно в (1.7) учесть, что для $f\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ имеют места оценки:

$$\omega_f^{1,0}(\xi)\le\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}\cdot\xi^\alpha,\qquad\omega_f^{0,1}(\eta)\le\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}\cdot\eta^\beta.$$

Следствие 1.2. Пусть $f\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}$ и $p\ge1$. Тогда верно неравенство:

$$\|f\|_{C(T^2)}\le L\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}^{\gamma}\cdot\|f\|_{L_p}^{1-\gamma},\tag{1.9}$$

где $\gamma=\dfrac{1+p(\alpha+\beta)}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}$,

$$l=\max\left\{\frac{(1+\alpha p)(1+\beta p)}{(\alpha\beta p)^{1-\gamma}},\ \frac{\sqrt[p]{4}(1+\alpha p)(1+\beta p)}{\alpha\beta p\pi^{1-\gamma}}\right\}\tag{1.10}$$

Доказательство. По следствию 1.1. имеем

$$\|f\|_{C(T^2)}\le\xi^\alpha\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}+\eta^\beta\|f\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}+(\xi\cdot\eta)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p}\qquad 0<\xi,\eta\le\pi\tag{1.11}$$

Применяя к неравенству (1.11) мультипликативное неравенство, доказанное в [5], после несложных выкладок получим (1.9).

§2. Сжимаемость оператора, порожденного уравнением (А)

Вернемся НСИУ (А). Пусть

$$B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)=\left\{\varphi\in K_{\alpha,\beta}^{1,1}\,\middle|\,\|\varphi\|_{K_{\alpha,\beta}^{1,1}}\le R\right\}$$

шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $K_{\alpha,\beta}^{1,1}$. Чтобы исследовать уравнение (А), докажем следующую теорему для оператора суперпозиции $F:\varphi(x,y)\to F[x,y,\varphi(x,y)]$.

Теорема 2.1. Пусть функция $F(x,y,\varphi):T^2\times[-R,R]\to R$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Существует частная производная $F'_\varphi(x,y,\varphi)$ и существует $C_0>0$ такая, что для
$\forall\,\varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]\quad \left|F'_\varphi(x,y,\varphi_1)-F'_\varphi(x,y,\varphi_2)\right|\le C_0|\varphi_1-\varphi_2|$;
2) $\exists C_1>0,\ \forall x_1,x_2\in[-\pi,\pi]\ \left|F(x_1,y,\varphi)-F(x_2,y,\varphi)\right|\le C_1|x_1-x_2|^\alpha$;
3) $\exists\, C_2>0,\ \forall\ y_1,y_2\in[-\pi,\pi]\ \left|F(x,y_1,\varphi)-F(x,y_2,\varphi)\right|\le C_2|y_1-y_2|^\beta$;
4) $\exists\, C_3>0,\ \forall\ x_1,y_1,x_2,y_2\in[-\pi,\pi]$
$\left|F(x_1,y_1,\varphi)-F(x_1,y_2,\varphi)-F(x_2,y_1,\varphi)+F(x_2,y_2,\varphi)\right|\le C_3|x_1-x_2|^\alpha|y_1-y_2|^\beta$;
5) $\exists C_4>0\ \forall\ x_1,x_2\in[-\pi,\pi],\ \forall\ \varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]$
$\left|F(x_1,y,\varphi_1)-F(x_1,y,\varphi_2)-F(x_2,y,\varphi_1)+F(x_2,y,\varphi_2)\right|\le C_4|x_1-x_2|^\alpha|\varphi_1-\varphi_2|$;
6) $\exists C_5>0\quad \forall\, y_1,y_2\in[-\pi,\pi],\quad \forall\,\varphi_1,\varphi_2\in[-R,R]$
$\left|F(x,y_1,\varphi_1)-F(x,y_1,\varphi_2)-F(x,y_2,\varphi_1)+F(x,y_2,\varphi_2)\right|\le C_5|y_1-y_2|^\beta|\varphi_1-\varphi_2|$

Тогда оператор суперпозиции $F:\varphi(x,y)\to F[x,y,\varphi(x,y)]$ действует из шара $B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$ в шар $B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R_1)$, где R_1 однозначно определяется начальными данными.

Доказательство. Пусть $\varphi\in B_{\alpha,\beta}^{1,1}(R)$. Тогда по условиям 1) и 2) для произвольных $x_1,x_2\in[-\pi,\pi]$ имеем:

$$\left|F[x_1,y,\varphi(x_1,y)]-F[x_2,y,\varphi(x_2,y)]\right|=$$
$$=\left|F[x_1,y,\varphi(x_1,y)]-F[x_1,y,\varphi(x_2,y)]+F[x_1,y,\varphi(x_2,y)]-F[x_2,y,\varphi(x_2,y)]\right|\le$$
$$\le\left|F[x_1,y,\varphi(x_1,y)]-F[x_1,y,\varphi(x_2,y)]\right|+\left|F[x_1,y,\varphi(x_2,y)]-F[x_2,y,\varphi(x_2,y)]\right|\le$$

$$\leq \left| F_{\varphi}{}' \left[x_1, y, \varphi(x_2, y) + \theta(\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y))\right] \right| \left|\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2 y)\right| +$$

$$+ \left| F[x_1, y, \varphi(x_2, y)] - F[x_2, y, \varphi(x_2, y)] \right| \leq C^* \left|\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)\right| + C_1 |x_1 - x_2|^{\alpha} \leq$$

$$\leq C^* R |x_1 - x_2|^{\alpha} + C_1 |x_1 - x_2|^{\alpha} = \left(C^* R + C_1\right) |x_1 - x_2|^{\alpha}, \qquad (2.1)$$

где

$$C^* = \max_{x,y,\varphi} \left| F_{\varphi}'(x, y, \varphi) \right|.$$

Аналогичным образом находим, что

$$\left| F[x, y_1, \varphi(x, y_1)] - F[x, y_2, \varphi(x, y_2)] \right| \leq \left(C^* R + C_2\right) |y_1 - y_2|^{\beta} \qquad (2.2)$$

Теперь рассмотрим выражение

$$L = F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_1)] - F[s_1, t_2, \varphi(s_1, t_2)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_1)] + F[s_2, t_2, \varphi(s_2, t_2)]$$

Имеем

$$|L| \leq \left| F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_1)] - F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_2)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_1)] + F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_2)] \right| +$$

$$+ \left| F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_2)] - F[s_1, t_2, \varphi(s_2, t_2)] - F[s_1, t_2, \varphi(s_1, t_2)] + F[s_1, t_2, \varphi(s_2, t_2)] \right| +$$

$$+ \left| F[s_1, t_1, \varphi(s_2, t_2)] - F[s_1, t_2, \varphi(s_2, t_2)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_2)] + F[s_2, t_2, \varphi(s_2, t_2)] \right| =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 \qquad (2.3)$$

Каждую слагаемую в (2.3) оценим в отдельности.

$$J_1 \leq \left| F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_1)] - F[s_1, t_1, \varphi(s_1, t_2)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_1)] + F[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_2)] \right| +$$

$$+ \left| F[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_1)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_2)] - F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_1)] + F[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_2)] \right| =$$

$$= J_1' + J_1'' \qquad (2.4)$$

По условию 5) получаем, что

$$J_1' \leq C_4 |s_1 - s_2|^{\alpha} \left|\varphi(s_1, t_1) - \varphi(s_1, t_2)\right| \leq C_4 \cdot R |s_1 - s_2|^{\alpha} |t_1 - t_2|^{\beta} \qquad (2.5)$$

Далее имеем

$$J_1'' = \Bigg| - \int_0^1 F_{\varphi}'[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_1) + \theta(\varphi(s_1, t_2) - \varphi(s_1, t_1))](\varphi(s_1, t_2) - \varphi(s_1, t_1)) d\theta +$$

$$+ \int_0^1 F_{\varphi}'[s_2, t_1, \varphi(s_2, t_1) + \theta(\varphi(s_2, t_2) - \varphi(s_2, t_1))](\varphi(s_2, t_2) - \varphi(s_2, t_1)) d\theta \Bigg| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^1 F_{\varphi}'[s_2, t_1, \varphi(s_1, t_1) + \theta(\varphi(s_1, t_2) - \varphi(s_1, t_1))](\varphi(s_1, t_2) - \varphi(s_1, t_1)) d\theta \right| +$$

$$+\left|\int_0^1 F'_\varphi[s_2,t_1,\varphi(s_2,t_1)+\theta(\varphi(s_2,t_2)-\varphi(s_2,t_1))](\varphi(s_2,t_2)-\varphi(s_2,t_1))d\theta\right|=J_{11}+J_{12} \qquad (2.6)$$

Учитывая 1) для J_{11} находим

$$J_{11}\le C_0\int_0^1|\varphi(s_1,t_1)-\varphi(s_2,t_1)+\theta(\varphi(s_1,t_2)-\varphi(s_1,t_1)-\varphi(s_2,t_2)+\varphi(s_2,t_1))|\times$$

$$\times|\varphi(s_1,t_2)-\varphi(s_1,t_1)|d\theta\le R|t_1-t_2|^\beta\cdot C_0\int_0^1|\varphi(s_1,t_1)-\varphi(s_2,t_1)+$$

$$+\theta(\varphi(s_1,t_2)-\varphi(s_1,t_1)-\varphi(s_2,t_1)+\varphi(s_2,t_2))|d\theta\le C_0R|t_1-t_2|^\beta\times$$

$$\times\left[R|s_1-s_2|^\alpha+R|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta\right]\le C_0R^2\left[1+(2\pi)^\beta\right]|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta \qquad (2.7)$$

А для J_{12} имеем

$$J_{12}\le C^*\int_0^1|\varphi(s_1,t_2)-\varphi(s_1,t_1)-\varphi(s_2,t_2)+\varphi(s_2,t_1)|d\theta\le RC^*|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta \qquad (2.8)$$

Таким образом, из оценок (2.5)–(2.8) следует, что

$$J_1\le\left\{C_4R+C_0R^2\left[1+(2\pi)^\beta\right]+RC^*\right\}|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta \qquad (2.9)$$

Аналогичными выкладками для J_2 можно получить оценку

$$J_2\le\left\{C_0R^2\left[1+(2\pi)^\alpha\right]+RC^*\right\}|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta \qquad (2.10)$$

А для J_3 легко находим, что

$$J_3\le C_3|s_1-s_2|^\alpha\cdot|t_1-t_2|^\beta \qquad (2.11)$$

Из (2.1) – (2.11) следует справедливость утверждения теоремы.

А теперь рассмотрим сингулярный оператор

$$(A\varphi)(x,y)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F[s,t,\varphi(s,t)]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt \qquad (2.12)$$

Если выполняются условия теоремы 2.1., то из $\varphi\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}$ следует, что $F[s,t,\varphi(s,t)]\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}$.

Оператор (2.12) можно представить в виде

$$A=\lambda SF_1, \qquad (2.13)$$

где

$$(S\upsilon)(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\upsilon(s,t)ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt, \qquad (2.14)$$

$$(F_1\varphi)(s,t)=F[s,t,\varphi(s,t)] \qquad (2.15)$$

Из результатов работы [3] следует, что оператор S является ограниченным в $K^{1,1}_{\alpha,\beta}$.

Введем следующую функцию

$$G(x,y)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F[s,t,\varphi(s,t)]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt+f(x,y)$$

Пусть $\varphi\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R)$ и $f\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R')$ $(R'<R)$. Тогда по теореме 2.1. имеем

$$\|G(x,y)\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}}\le|\lambda|\|S\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}\to K^{1,1}_{\alpha,\beta}}\cdot R_1+R'$$

Отсюда следует, что при $|\lambda|<\dfrac{R-R'}{R_1\cdot\|S\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}\to K^{1,1}_{\alpha,\beta}}}$

оператор

$$(T\varphi)(x,y)=(A\varphi)(x,y)+f(x,y) \qquad (2.16)$$

отображает шар $K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R)$ в себя.

Докажем, что при малых λ оператор T является сжимающим в метрике $L_2(T^2)$. Верна следующая

Теорема 2.2. Пусть функция $F(s,t,\varphi):T^2\times[-R,R]\to R$ удовлетворяет условиям 1) – 6) и $f\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R')$ $(R'<R)$.
Тогда при

$$|\lambda|<\min\left\{\frac{1}{C^*\|S\|_{L_2\to L_2}},\frac{R-R'}{R_1\cdot\|S\|_{K^{1,1}_{\alpha,\beta}\to K^{1,1}_{\alpha,\beta}}}\right\} \qquad (2.17)$$

оператор T является сжимающим в шаре $K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R)$ в метрике пространства $L_2(T^2)$.

Доказательство: Известно, что оператор S в пространстве $L_2(T^2)$ действует ограниченно. (см. [6]). Тогда для любых $\varphi_1,\varphi_2\in K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R)$ имеем:

$$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|_{L_2(T^2)}=\left\|\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F[s,t,\varphi_1(s,t)]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt-\right.$$

$$\left.-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F[s,t,\varphi_2(s,t)]ctg\frac{s-x}{2}ctg\frac{t-y}{2}dsdt\right\|_{L_2(T^2)}\le$$

$$\leq |\lambda| \|S\|_{L_2(T^2)} \|F[s,t,\varphi_1(s,t)] - F[s,t,\varphi_2(s,t)]\|_{L_2(T^2)} \tag{2.18}$$

Далее,

$$\|F[s,t,\varphi_1(s,t)] - F[s,t,\varphi_2(s,t)]\|_{L_2(T^2)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F[s,t,\varphi_1(s,t)] - F[s,t,\varphi_2(s,t)]|^2 \, dsdt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C^* \left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_1(s,t) - \varphi_2(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} = C^* \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(T^2)}$$

Таким образом,

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{L_2(T^2)} \leq |\lambda| \|S\|_{L_2(T^2)} \cdot C^* \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(T^2)} \tag{2.19}$$

Из (2.19) вытекает, что при выполнении условия (2.17) оператор T в шаре $K^{1,1}_{\alpha,\beta}(R)$ является сжимающим в метрике $L_2(T^2)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Какичев В.А. Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных. Изв. Вузов. Матем., 1959, №2, с.80-93
2. Габдулхаев Б.Г. Приближенные решения многомерных сингулярных интегральных уравнений, II. Изв. Вузов. Матем., 1976, №1, с.30-41
3. Мусаев Б.И., Салаев В.В. О сопряженных функциях многих переменных, II. Учен.зап. Азерб. Ун-та, Сер. Физ-матем. н., 1978, №4, с.5-18
4. Джваршейшвили А.Г. Об одном неравенстве А.Зигмунда для функций двух переменных. Сообщ. АН Груз. ССР, 1954, т.15, № 9
5. Абдуллаев Ф.А. О некоторых мультипликативных неравенствах для функций двух переменных. Azərb. Resp. "Təhsil" Cəmiyyəti, "Bilgi" dərgisi, Fizika Riyaziyyat Yer Elmləri. 2004, № 2
6. Жижиашвили Л.В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов. Успехи матем. Наук, 1973, т.28, № 2
7. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. "Наука", 1979

HİLBERT NÜVƏLİ BİR QEYRİ -XƏTTİ SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATOR HAQQINDA

N.F.QASIMOVA

ANNOTASİYA

İşdə bir sinif qeyri-xətti ikiölçülü sinqulyar inteqral tənliklərin doğurduğu Hilbert nüvəli qeyri-xətti sinqulyar inteqral operator öyrənilir. Belə tənliklər analitik funksiyanın sərhəd qiymətlərini öyrənərkən meydana çıxır. İşdə öyrənilən operatorun L_2 fəzasının metrikasında sıxılmış inikas olması isbat olunur.

ON A NONLINEAR SINGULAR INTEGRAL OPERATOR WITH HILBERT CERNEL

N.F.GASIMOVA

ABSTRACT

In this work the nonlinear singular integral operator with Hilbert kernel, generated by a class of two-dimensional nonlinear singular equations is studied. Such equations are encountered in studying of boundary values of analytical functions depending of two variables. In the work the contractibility of the studied operator in the since of the metric of the space L_2 is proved.